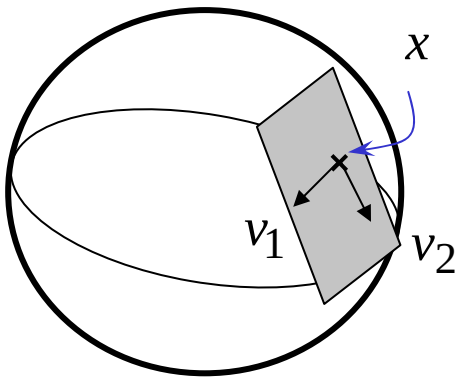
Tangentenvektoren und Tangentialraum

(kontravariante Vektoren oder einfach Vektoren)

Gegeben eine m - dimensionale Mannigfaltigkeit M, definiert man an jedem Punkt x den Tangentialraum $T_x M$ als den m – dimensionalen Vektorraum aller möglichen Geschwindigkeiten in x (entlang der Mannigfaltigkeit).



Ausschließlich diese Größen werden in der Differentialgeometrie als „Vektoren“ bezeichnet. Dargestellt werden sie als Spaltenvektoren.

Beispiele:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$ Vektor auf Q

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$ Vektor auf $SE3$; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$: Vektor auf $SO3$

Gelenkgeschwindigkeit in $\mathbb{R}^n$

Kartesische Geschwindigkeit in SE3

Kotangentenvektoren und Kotangentialraum

(Kovektoren, Kovektorraum)

Der **Kotangentialraum** $T_x^* M$ in einem Punkt x der Mannigfaltigkeit M ist der lineare Vektorraum aller linearen Funktionale

$$\eta : T_x M \to \mathbb{R}$$

Die Elemente η des Kotangentialraumes werden **Kotangentenvektoren (Kovektoren)** genannt.

Für eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit hat der Kovektorraum auch Dimension m.

Beispiele:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_i \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

Drehmoment im Gelenkraum

$$\tau(\dot{q}) = \tau^T \cdot \dot{q} = P$$

Leistung

Kartesische verallgemeinerte Kraft

$$f(\dot{x}) = f^T \cdot \dot{x} = P$$

Transformation von Vektoren und Kovektoren

Warum ist die Unterscheidung Vektor – Kovektor überhaupt wichtig?

Vektoren und Kovektoren transformieren unterschiedlich bei Abbildungen zwischen Koordinatensystemen oder zwischen Mannigfaltigkeiten

Beispiel:

Die Vorwärtskinematik $x=f(q)$ ist eine lokale Abbildung zwischen Q und $SE3$

Bekanntlich transformieren die Geschwindigkeiten wie folgt:

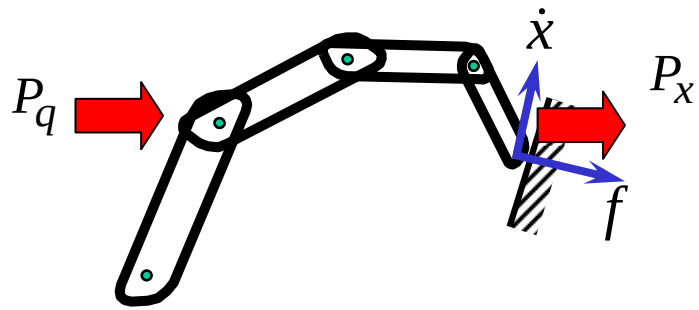
$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}f(q)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(q)}{\partial q}\dot{q} = J(q)\dot{q}$$

Jacobimatrix

Da die Leistung P nicht verändert wird, gilt $P_q = P_x$

$$P_x = f^T \dot{x} = f^T J(q)\dot{q}$$
$$P_q = \tau^T \dot{q}$$

$$\Rightarrow \tau = J^T(q) f$$



Bemerkung: Das Produkt zwischen Vektor und Kovektor ist somit wohl definiert, d.h. wird beim Wechsel von Koordinaten erhalten

Transformation von Vektoren und Kovektoren

Warum ist die Unterscheidung Vektor –Kovektor überhaupt wichtig?

Im Allgemeinen, falls ϕ eine Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten M^m und N^n ist, mit

x – Koordinaten von M^m
y – Koordinaten von N^n

$$y = \phi(x)$$

transformieren Vektoren **kontravariant**:

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x}\dot{x} = J_\phi(x)\dot{x}$$

und Kovektoren **kovariant:**

$$\eta_x = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^T \eta_y = J_\phi^T(x)\eta_y$$

Tensoren

Was sind die restlichen Größen in der Roboterdynamik? Wie transformieren sie?

Strecke:

$$\underline{M}(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) + g(q) = \tau$$

Regler:

$$\tau = g(q_d) + \underline{K}(q_d - q) + \underline{D}(\dot{q}_d - \dot{q})$$

Ein Tensor vom Typ (p,q) ist eine *multilineare* Abbildung

$$A : \underbrace{T_x M \times \ldots \times T_x M}_{p} \times \underbrace{T_x^* M \ldots \times T_x^* M}_{q} \to \mathbb{R}$$

p mal kovariant
q mal kontravariant

Beispiele:

1. Ein Kovektor ist ein Tensor vom Typ (1,0), also einmal kovariant

$$A = \eta \quad , v \in T_x M \qquad \eta(v) = \eta^T v = \sum_i \eta_i v_i \ \in \mathbb{R} \qquad (=P \text{ für } \eta = \tau,\ v = \dot{q})$$

2. Ein Vektor ist ein Tensor vom Typ (0,1), also einmal kontravariant

$$A = v \quad , \eta \in T_x^* M \qquad v(\eta) = v^T \eta = \sum_i v_i \eta_i \ \in \mathbb{R} \qquad (=P \text{ für } \eta = \tau,\ v = \dot{q})$$

Tensoren

Was sind die restlichen Größen in der Roboterdynamik? Wie transformieren sie?

Beispiel:

3. M, K, D sind Tensoren vom Typ (2,0), also zweimal kovariant

$$A = a_{ij} \qquad v_1, v_2 \in T_x M \qquad A(v_1, v_2) = v_1^T A v_2 = \sum_{i,j} a_{ij} v_{1i} v_{2j} \in \mathbb{R}$$

- Für $A = \frac{1}{2} M(q), \quad v_1, v_2 = \dot{q}$

Massenmatrix

$$A(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = T(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}$$

kinetische Energie

- Für $A = D, \quad v_1, v_2 = \dot{q}$

Dämpfungsmatrix

$$A(v_1, v_2) = \dot{q}^T D \dot{q} = E_D \in \mathbb{R}$$

vom viskosen Dämpfer in Wärme umgesetzte Energie

- Für $A = \frac{1}{2} K, \quad v_1, v_2 = \Delta q$

Steifigkeitsmatrix

$$A(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \Delta q^T K \Delta q = E_p \in \mathbb{R}$$

potentielle Energie der (m-dimensionalen) Feder

Bemerkung: Δq ist nur annähernd (für sehr „kleine Inkremente“) ein Vektor im Tangentialraum. Genauere Definition von Ep folgt zu einem späteren Zeitpunkt.

Tensoren

Bemerkung: durch Anwendung eines kovarianten Tensors auf einen Vektor ergibt sich ein kovarianter Tensor dessen Ordnung um 1 reduziert ist.

z.B.:

$$\tau_D = D\dot{q}$$

(1,0) (2,0) (0,1)

$$E_D = \tau^T{}_D \dot{q}$$

(0,0) (1,0) (0,1)

Bemerkung: somit ist eine skalare Funktion ein Tensor nullter Ordnung

4. Tensoren vom Typ (1,1)

Tafelerklärung:
wieso ist x ein Vektor?

- lineares dynamisches System: $\dot{x} = Ax$

(0,1) (1,1) (0,1)

Die Systemmatrix ist in diesem Fall ein Tensor vom Typ (1,1) –einmal kovariant, einmal kontravariant

Tensoren

Was sind die restlichen Größen in der Roboterdynamik? Wie transformieren sie?

Beispiel:

5. M^{-1}, K^{-1} sind Tensoren vom Typ (0,2), also zweimal kontravariant

$$A = a_{ij} \qquad \eta_1, \eta_2 \in T_x^* M \qquad A(\eta_1, \eta_2) = \eta_1^T A \eta_2 = \sum_{i,j} a_{ij} \eta_{1i} \eta_{2j} \in \mathbb{R}$$

- Für $A = \frac{1}{2} M^{-1}(q), \quad \eta_1, \eta_2 = p \qquad (p = M(q)\dot{q})$ Impuls

Mobilitätsmatrix

$$A(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p = T(q, p) \in \mathbb{R}$$

kinetische Energie

- Für $A = \frac{1}{2} K^{-1}, \quad \eta_1, \eta_2 = \tau_e$ Elastisches Moment

$$A(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2} \tau_e^T K^{-1} \tau_e = E_p \in \mathbb{R}$$

potentielle Energie der (m-dimensionalen) Feder

Nachgiebigkeitsmatrix

Zusatzfolie: Tensoren

Beispiel:

6. Coriolis und Zentrifugalkräfte:

$$c_k(q,\dot{q}) = \sum_{i,j} c_{ijk}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

Tensor vom Typ (1,0)
(d.h. Kovektor)

Tensor vom Typ (3,0)

$$c_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)$$

m-Elemente der Massenmatrix

Koordinatentransformation für Tensoren

Wozu sind Unterscheidungen zwischen den Tensortypen gut?

Im Allgemeinen, gegeben eine Abbildung ϕ zwischen Mannigfaltigkeiten M^m und N^n, mit

x – Koordinaten von M^m

y – Koordinaten von N^n

$$y = \phi(x)$$

Grundidee: die skalare Größe aus der Tensordefinition bleibt in allen Koordinaten erhalten. (z.B. Energie, Leistung des Roboters)

1. Tensoren vom Typ (2,0)

$$E_y = v_y^T A_y v_y = v_x^T J_\phi^T(x) A_y J_\phi(x) v_x$$
$$E_x = v_x^T A_x v_x$$

=> $$\boxed{A_x = J_\phi^T(x) A_y J_\phi(x)}$$

Kongruenz-Transformation

2. Tensoren vom Typ (1,1)

$$E_y = \eta_y^T A_y v_y = \eta_x^T J_\phi^{-1}(x) A_y J_\phi(x) v_x$$
$$E_x = \eta_x^T A_x v_x$$

=> $$\boxed{A_x = J_\phi^{-1}(x) A_y J_\phi(x)}$$

Ähnlichkeitstransformation

Skalarprodukt und Metrik von Vektoren

- in Euklidische Raum

$$\langle u,v\rangle = u^T v = \sum_i u_i v_i \qquad \|u\| = \langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}$$

- Verallgemeinerung auf Mannigfaltigkeiten

$$\langle u,v\rangle = u^T M v = \sum_{i,j} u_i M_{ij} v_i \qquad \|u\| = \langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Dabei ist M ein (positiv definiter -p.d.) Tensor (auch Metrik genannt) vom Typ (2,0) und muss bei einem Wechsel von Koordinaten entsprechend transformiert werden!

Beispiel: Für Geschwindigkeitsvektoren $\dot{q}$ ist z.B. $M = \frac{1}{2} M(q)$ (Massenmatrix) und $\|\dot{q}\|_M^2$ die kinetische Energie eines Manipulators.

(Damit wird auch das Problem des Maßeinheiten gelöst)

Bemerkung: Man erinnere sich, dass ein Vektor nicht auf einen anderen Vektors wirken kann, sondern nur auf einen kovarianten Tensor

Reziproke Twists und Wrenches

Orthogonalität zwischen Vektoren

$$u \perp v \Leftrightarrow \sum_i u_i v_i = 0$$

ist somit differentialgeometrisch nicht wohl definiert,

wohl aber die **reziproke Beziehung** eines Vektors v zu einem Kovektor w:

Ein Vektors $\boldsymbol{v}$ und ein Kovektor $\boldsymbol{\eta}$ werden als reziprok bezeichnet, wenn:

$$\eta^T v \;\; (= \eta(v) = v(\eta) = \sum_i \eta_i v_i \;) \;\; = 0$$

Beispiel: Für $\eta = f$, $v = \dot{x}$: ein Wrench und ein Twist sind reziprok, wenn die umgesetzte Leistung 0 ist.
Hybride Kraft/Positionsregelung: Es werden m linear unabhängige Twists geregelt, sowie (6-m) Wrenches, die reziprok zu den m Twists sind.