# PD+ Regler

(Was ist die einfachste Verallgemeinerung auf den Fall der Bahnregelung?)

Eine Erweiterung des PD-Reglers für eine Bahnregelung mit Hilfe einer Vorsteuerung ist naheliegend

$$\tau = \tau_d + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_P(q_d - q)$$

(Linearisierung um Sollbahn)

$$\tau_d = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + g(q_d)$$

Nur eine lokale Stabilitätsanalyse ist in diesem Zusammenhang möglich

Stattdessen betrachte man nun

$$\tau_d = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q)$$

Geschlossene Reglerschleife

$$M(q)\ddot{e} + C(q, \dot{q})\dot{e} + K_D\dot{e} + K_P e = 0 \qquad e(q,t) = q - q_d(t)$$

Die globale Stabilität folgt dann mit der Lyapunov Funktion

$$V(e, \dot{e}) = \frac{1}{2}\left(e^T K_P e + \dot{e}^T M(q)\dot{e}\right)$$

und deren Ableitung: $\dot{V}(t) = -\dot{e}^T k_D \dot{e}$

# PD+ Regler

$$q = e - q_d(t)$$

Bemerkung: dies ist ein zeitvariantes System (zum Unterschied vom Lage-regler), da die Zeit explizit, getrennt von $e$ vorkommt! Das LaSalle-Theorem kann somit nicht benutzt werden!

mögliche Lösung: Barbalat Lemma

Für diesen Regler kann aber auch eine strikte Lyapunov-Funktion aufgestellt werden $\dot{V}(q,\dot{q},t) \leq 0,\ \forall q,\dot{q} \neq 0$ mit Hilfe derer globale asymptotische Stabilität nachgewiesen werden kann.

Bemerkungen:
-Im Gegensatz zum Entkopplungsregler, ist die Dynamik weder linear noch entkoppelt
- Die Dämpfung kann bei konstanter Masse und Steifigkeit für optimale Performance in jedem Arbeitspunkt ausgelegt werden

# Dämpfungsentwurf

(Wie lege ich die Dämpfungsmatrix für optimale Performance mit dem PD-Regler aus?)

Voraussetzungen:

- Die Massenmatrix verändert ihre Einträge stellungsabhängig
- Die Massenmatrix wird als quasistationär angenommen
- Es wird eine konstante Steifigkeit angenommen

Wie soll die Dämpfung ausgelegt werden, damit das System gut gedämpft ist?

Beispiel: eindimensionaler, linearer Fall (konstante Masse):

$$m\ddot{q} + d\dot{q} + kq = 0 \qquad d = 2\xi\sqrt{mk}, \quad 0 \le \xi \le 1$$

zwei reelle Pole

Verallgemeinerung auf den Matrizenfall:

A-p.d., sym. $\exists A_1$ sym, p.d, so dass $A_1 A_1 = A$

Wurzel einer p.d., symmetrischen Matrix

$$K_{P1} K_{P1} = K_P$$

$$M_1 M_1 = M \qquad K_D = \xi\left(M_1 K_{P1} + K_{P1} M_1\right)$$

# Dämpfungsentwurf

z.B. für eine quasistatische (linearisierte) Approximation der Roboterdynamik

$$M\ddot{e} + K_D\dot{e} + K_P e = 0$$

$$\xi = 1$$

$$K_D = \left( M_1 K_{P1} + K_{P1} M_1 \right)$$

folgt

$$M_1 M_1 \ddot{e} + M_1 K_{P1} \dot{e} + K_{P1} M_1 \dot{e} + K_{P1} K_{P1} e = 0$$

oder , äquivalent

$$M_1 \dot{e} + K_{P1} e = w \quad \longleftarrow \quad \text{Zwischenvariable}$$

$$M_1 \dot{w} + K_{P1} w = 0$$

Zwei Differentialgleichungen erster Ordnung und somit reelle Eigenwerte

Bemerkung: Die quasistatische Approximation wird nur in der Dämpfungsauslegung benutzt, die Stabilität gilt nach wie vor für das nichtlineare System!

# G.E.S. Passivitätsbasierter Bahnregler

(Bekannt als Slotine and Li Regler)

Strecke:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

Regler:

$$\tau = M(q)\dot{v} + C(q,\dot{q})v + g(q) - Kr$$

mit $v = \dot{q} - r$

Tracking Error $r = (\dot{q} - \dot{q}_d) + \Lambda(q - q_d)$

$\Lambda, K$ - diagonale, konstante Matrizen

Die geschlossene Reglerschleife ist dann:

$$\boxed{\begin{aligned} &M(q)\dot{r} + C(q,\dot{q})r + Kr = 0 \\ &r = \dot{e} + \Lambda e \end{aligned}}$$

Beispiel:

Für ein eindimensionales, lineares Gelenkmodell

$$m(\ddot{e} + \lambda\dot{e}) + k(\dot{e} + \lambda e) = 0$$

Laplace-Bereich: $(ms + k)(s + \lambda)e(s) = 0$

Pole: $s_1 = -\frac{k}{m}$, $s_2 = -\lambda$

# Stabilität und Konvergenz

(für Slotine und Li Regler)

Lyapunov Funktion:

abstrakter, keine Analogie mehr zu einer physikalischen Energie

$$V(e,\dot{e}) = \frac{1}{2} r^T M(q) r + e^T \Lambda K e$$

und deren Ableitung

$$\dot{V}(e,\dot{e}) = \frac{1}{2} r^T \dot{M}(q) r + r^T M(q) \dot{r} + 2 e^T \Lambda K \dot{e}$$

durch Einsetzen aus den Systemgleichungen:

$$M(q)\dot{r} = -C(q,\dot{q})r - Kr$$

$$\dot{V}(e,\dot{e}) = r^T \underbrace{\cancel{\left(\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q,\dot{q})\right)}}_{=0} r + r^T K r + 2 e^T \Lambda K \dot{e}$$

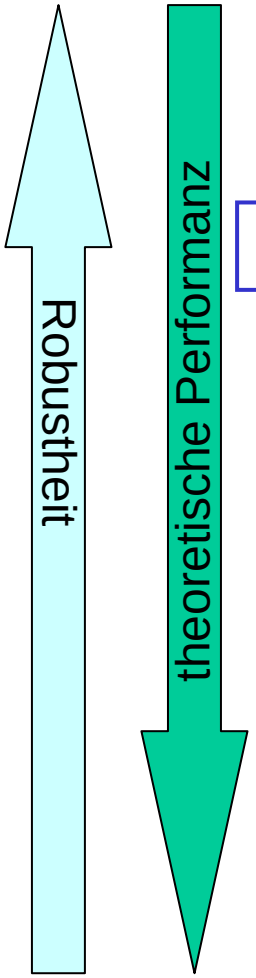
$$r = \dot{e} + \Lambda e$$

$$\boxed{\dot{V}(e,\dot{e}) = -\dot{e}^T \Lambda K \Lambda \dot{e} - e^T K e \quad < 0}$$

negativ definit, es wird also nicht LaSalle gebraucht!

-Daraus resultiert direkt die globale asymptotische Stabilität (g.a.s)
-Es kann sogar nachgewiesen werden, das das System (g.e.s)

# Zusammenfassung Gelenkregler




| | | |
|---|---|---|
| Lageregler (PD + g(q)) | g.a.s. | für $q_d$ konstant |
| Bahnregler (PD + g(q) + Vorsteuerung) | l.s. | |
| Bahnregler (PD+ Regler) | g.a.s. | (aufwendiger nachweisbar) |
| Bahnregler (Slotine & Li) | g.e.s. | |
| Computed Torque | g.e.s.<br>linear, entkoppelt | |

# Zusammenfassung Gelenkregler

Ein bleibendes Problem ist die Behandlung von Modellfehlern und Störungen

-Gelenkreibung

-Ungenaue Last- und Roboterddaten (Masse, Schwerpunkt,Trägheiten,…)

-externe Störungen

hinsichtlich der Reglergenauigkeit

Mögliche Lösungen:

- Reibungskompensation (Modellbasiert)
- Integrator
- Störgrößenbeobachter und Störgrößenaufschaltung – wird in der Vorlesung später behandelt.
- Adaptive Regelung

# Passivitätsbasierte Kartesische Regelung

# Allgemeine Betrachtungen

Für einen nichtredundanten, nicht singulären Roboter können alle auf Gelenkebene besprochenen Regler auch in kartesischen Koordinaten angewandt werden.

Robotermodell in $\boldsymbol{SE3}$ Koordinaten $x$:

$$\boxed{M_K(q)\ddot{x} + C_K(q,\dot{q})\dot{x} + g_K(q) = F}$$

z.B. PD-Regler mit Schwerkraftkompensation (Lageregler)

$$F = -k_P(x - x_d) - k_D\dot{x}$$

$$\tau = J^T(q)F + g(q)$$

geschlossene Reglerschleife:

$$\boxed{M_K(q)\ddot{x} + C_K(q,\dot{q})\dot{x} + k_D\dot{x} + k_P(x - x_d) = 0}$$

l.a.s. – basierend auf dem LaSalle Theorem

# Unterschiede zum Gelenkregler

- Alle Aussagen sind nur lokal, nicht global gültig!

Warum?

- In kartesischen Koordinaten ist es nicht möglich, ein stetiges Potential mit einem einzigen globalen Minimum zu definieren

  Dies gilt unabhängig von der gegebenen Roboterkinematik, es ist eine Eigenschaft von *SE3 (SO3)*

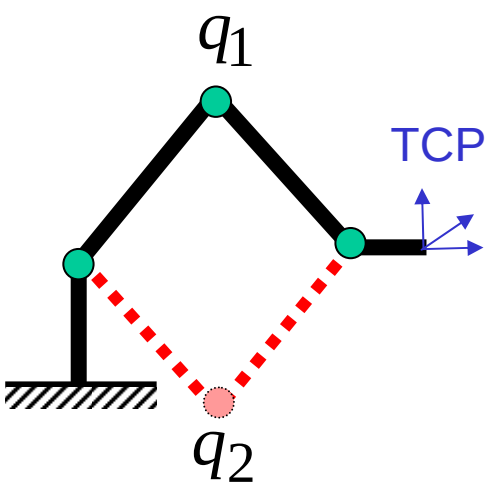
- Im Falle von redundanten Robotern bedeutet die Konvergenz in den Koordinaten x keine asymptotische Stabilität des Systems (Nullraumverhalten)

# Lokale Gültigkeit der Kartesischen Regelung

Grund 1 (Roboterbedingt)

Die Vorwärtskinematik $f : Q \to SE3$ ist nur lokal bijektiv, global aber nicht.

Beispiel:
(GIR)




$$x = x_d$$

$$q \in \{q_1, q_2\}$$

Bei verschiedenen Ausgangskonfigurationen kann der Roboter zu verschiedenen Gelenkkonfigurationen konvergieren, während er die kartesische Konfiguration $x_d$ erreicht.

Bemerkung: Im Allgemeinen kann eine Umkonfiguration $q_1 \to q_2$ stattfinden, ohne eine Singularität durchfahren zu müssen („cuspidal manipulators“)!
Allerdings ist dies meistens für Roboter mit allen Achsen parallel oder senkrecht (also fast allen praktisch realisierten Robotern) nicht der Fall.

# Manipulatorsingularitäten

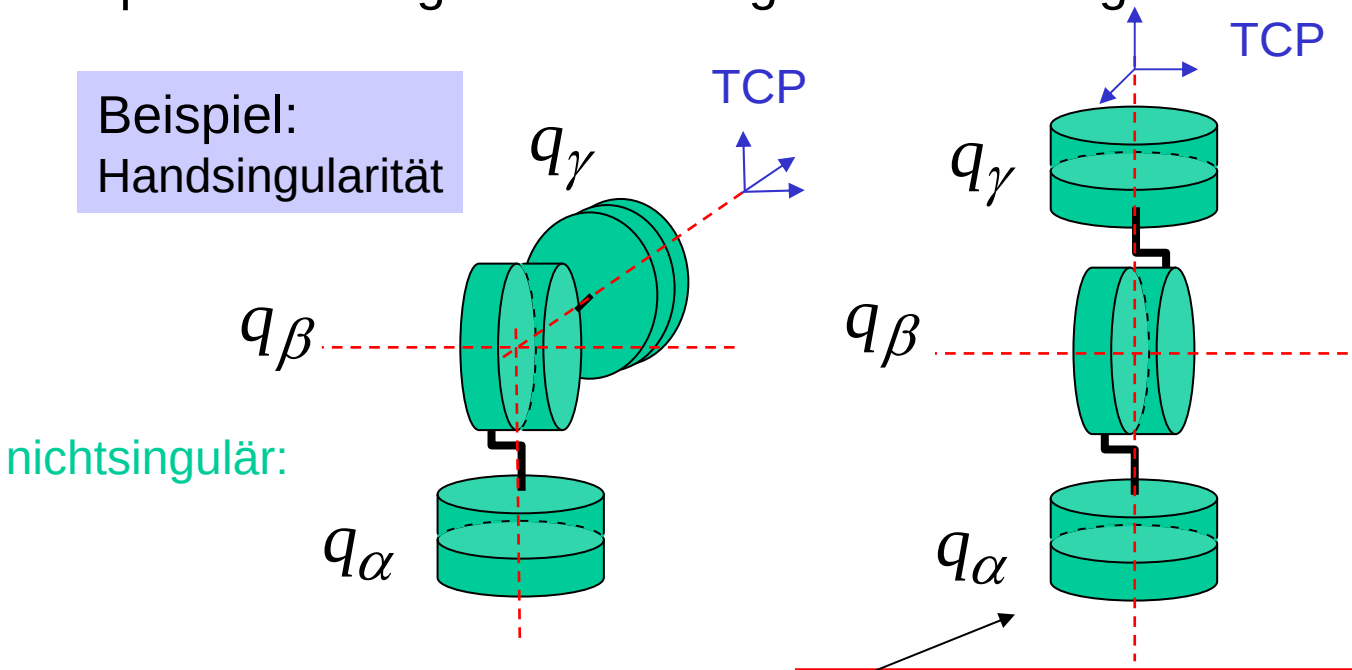
(Warum kann kartesische Regelung immer nur lokal sein?)

Grund 2 (Roboter & SE3)

Die Mannigfaltigkeiten SO3 (SE3) können nur lokal, nicht global durch 3 (6) Parameter beschrieben werden.

$\Rightarrow$ Es gibt keinen 6-achsigen Manipulator, der eine eindeutige Repräsentierung einer beliebigen TCP-Konfiguration ermöglichen kann.

Beispiel:
Handsingularität




singulär (β=90°):

Die kartesische Konfiguration des Roboters bleibt erhalten, solange $q_\gamma + q_\alpha$ konstant bleibt

Obzwar der kartesische Fehler konvergiert, gibt es keine eindeutige Ruhelage des Roboters

# Singularitäten „reloaded“

(Wie verhält sich eine Regelung auf Geschwindigkeitsschnittstelle/Kraftschnittstelle in Singularitäten )

Geschwindigkeitsschnittstelle: (siehe GIR)

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{x}$$

$\Rightarrow$ in der Nähe der Singularitäten wachsen die Gelenkgeschwindigkeiten unbegrenzt

„Roboter unruhig“

$$\dot{q} = (J^T(q)J(q) + \lambda^2 I)^{-1} J^T(q)\dot{x}$$

$\Rightarrow$ Begrenzung der Geschwindigkeit

$\Rightarrow$ Bahnfehler

Drehmomentschnittstelle:

$$\tau = J^T(q)F$$

$\Rightarrow$ eine Kraft in singulärer Richtung erzeugt kein Drehmoment in den Gelenken

„Roboter unempfindlich“

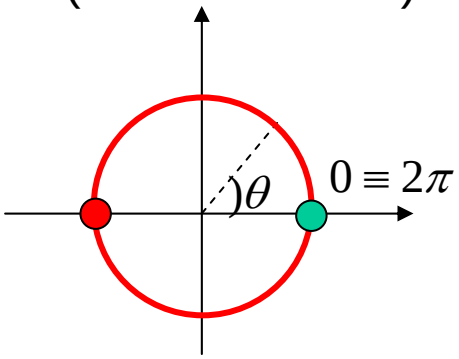
$\Rightarrow$ Bahnfehler

# Stetiges Kartesisches Potential

(Kann man die Vorstellung einer translatorischen Feder mit <u>einer</u> Ruhelage auf SO3 übertragen?)

Grund 3 (SO3)

Problembeschreibung (eindimensional)




stetiges Federmoment:

$$f = k_0 \sin(\theta)$$

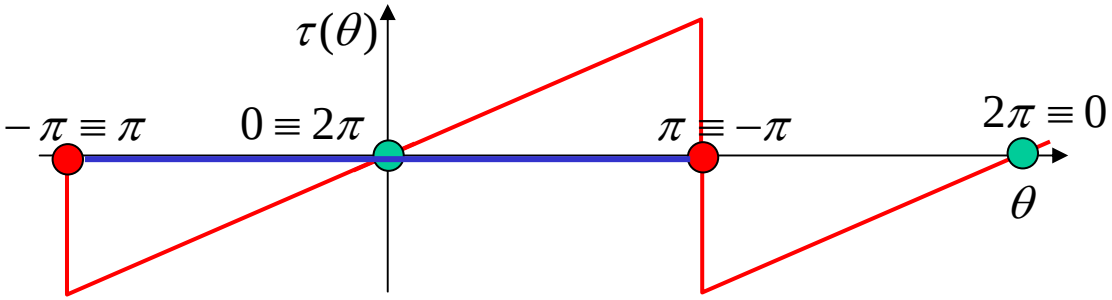
$$k = \frac{\partial f}{\partial \theta} = k_0 \cos(\theta)$$

$$V = \int_0^{\theta} f(x)dx = k_0(1-\cos(\theta)) =$$

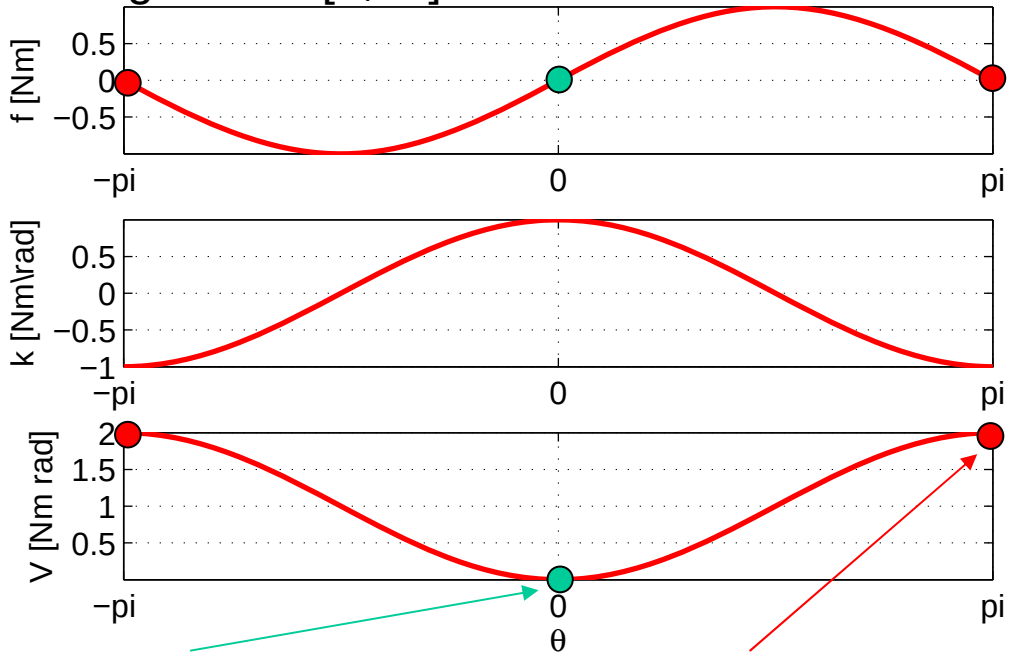
$$= 2k_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} \qquad (V(0)=0)$$

Eine stetiges Federmoment muss mindestens zwei Gleichgewichts-punkte haben

„lineares Federmoment“




Eine linear ansteigendes Federmoment muss eine Unstetigkeit auf [0,2π] aufweisen




stabiles Gleichgewicht (k>0) instabiles Gleichgewicht (k<0)

# Stetiges Potential für SO3

(Kann man die Vorstellung einer translatorischen Feder mit <u>einer</u> Ruhelage auf SO3 übertragen?)

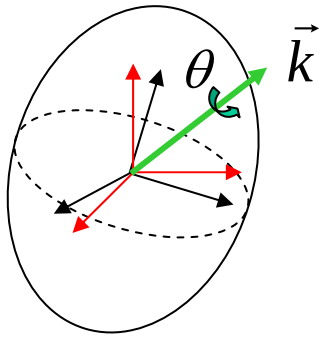
Grund 3 (SO3)

Man kann differentialgeometrisch beweisen, dass in SO3 für ein stetiges Potential mindestens 4 Gleichgewichtspunkte existieren (1 stabiles , Nulllage, 3 instabile – Rotationen um $\pi$ um jeweils eine Achse)

Implementierung z.B. mit Quaternionen

$$\lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] = \left[ \cos\frac{\theta}{2}, \underbrace{\vec{k}\sin\frac{\theta}{2}}_{\varepsilon} \right]$$

Skalarteil Vektorteil




$$\left\| \vec{k} \right\| = 1$$

Man nimmt $\varepsilon$ als lokale Koordinate für SO3

Potential: $V_\varepsilon = 2\varepsilon^T K_o \varepsilon = 2k^T K_0 k \sin^2\frac{\theta}{2}$

Moment: $F_\omega = J_{\varepsilon\omega}^T \underbrace{\left( -\frac{\partial V_\varepsilon(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T}_{F_\varepsilon} = J_{\varepsilon\omega}^T F_\varepsilon$

Die Jacobimatrix definiert durch: $\dot{\varepsilon} = J_{\varepsilon\omega}\omega$

Gelenkmoment:

$$\tau = J^T(q) \begin{bmatrix} F_v \\ F_\omega \end{bmatrix}$$

# Anwendung von Potentialen

Eine recht allgemeine Herangehensweise um Reglerkräfte im Rahmen des Passivitätsformalismus für einen Roboter zu erzeugen ist:

1. Man definiert lokale Koordinaten $p$, in denen das Reglerziel beschreiben wird

$$p = h(q)$$

2. Man definiert ein (z.B. quadratisches) Potential in $p$:

$$U(p) = \frac{1}{2} p^T K_p p$$

3. Man leitet das Potential ab, um Kräfte zu erhalten, die dual zu $\dot{p}$ sind

$$F_p^T = -\frac{\partial U_p(p)}{\partial p} \quad \Rightarrow F_p = -K_p p$$

4. Man wendet die Kettenregel an, um „elastische“ Gelenkmomente zu erhalten

$$\tau^T = \underbrace{-\frac{\partial U_p(p)}{\partial p}}_{F_p^T} \underbrace{\frac{\partial p(q)}{\partial q}}_{J_{pq}} \quad \Rightarrow \quad \tau = J_{pq}^T F_p$$

Koordinatentransformation für den Kovektor

# Anwendung von Potentialen

5. Man fügt einen dissipativen Term hinzu

$$F_{\dot{p}} = -D_p \dot{p} \quad \Rightarrow \tau_{\dot{p}} = J_{pq}^T F_{\dot{p}} \Rightarrow \tau_{\dot{p}} = -J_{pq}^T D_p J_{pq} \dot{q}$$

$$\dot{p} = J_{pq} \dot{q}$$

Koordinatentransformation für den Dämpfungstensor

Koordinatentransformation für den Vektor

Man erhält somit einen zusätzlichen PD-Regler in den Koordinate $p$

$$F = F_p + F_{\dot{p}} = -K_p p - D_p \dot{p}$$

Das Subsystem ist passiv bezüglich des Ein- Ausgangspaars $\{-\dot{p}, F\}$

In der Stabilitätsanalyse wird einfach das Potential $U(p)$ zur Lyapunov-Funktion hinzugefügt

Die Ableitung der Lyapunov-Funktion enthält den zusätzlichen Term

$$\dot{V}_{\dot{p}=} - \dot{p}^T D_p \dot{p}$$

# Anwendung von Potentialen

Bemerkungen:

- Für $p = x - x_d$ erhält man die kartesische Regelung
- Für Dämpfungsentwurf können die gleichen Methoden wie im Gelenkraum benutzt werden (Video)
- Weitere Anwendungen
  - Kollisionsvermeidung, Vermeidung von Gelenk-Endanschlägen
  - Singularitätsvermeidung
  - Nullraumsteifigkeit …
- Die Benutzung von Potentialen in günstigen Koordinaten ist viel effizienter als das direkte Aufstellen von Kräften die an bestimmten Punkten des Manipulators wirken.

Im ersten Fall: $U \xrightarrow{\text{Differentiation}} F$

Im zweiten Fall: $F \xrightarrow{\text{Integration}} U$

Differentiation ist immer einfacher als Integration! Im letzten Fall muss sichergestellt werden, dass das Kraftfeld wirklich integrierbar ist.

# Anwendung von Potentialen

Bemerkungen:

- Steifigkeit um Ruhelage:

Potential - kovarianter Tensor 0-ter Ordnung

$$U_p(p) = \frac{1}{2} p^T K_p p$$

konstant

$$U_q(q) = \frac{1}{2} p(q)^T K_p p(q)$$

Kraft - kovarianter Tensor 1-ter Ordnung

$$F_p^T = -\frac{\partial U_p(p)}{\partial p} \quad \Rightarrow F_p = -K_p p \qquad F_q{}^T = -\frac{\partial U_q(p(q))}{\partial p}\frac{\partial p(q)}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad F_q(q) = -J_{pq}^T(q) K_p p(q)$$

Steifigkeit - kovarianter Tensor 2-ter Ordnung

$$K = -\frac{\partial F_p(p)}{\partial p} \quad \Rightarrow K = K_p \qquad K = -\frac{\partial F_q(q)}{\partial q} \quad \Rightarrow K = J_{pq}^T(q) K_p \frac{\partial p(q)}{q}$$

← gültig nur um Ruhelage p=0, sonst muss $J_{pq}$ auch abgeleitet werden

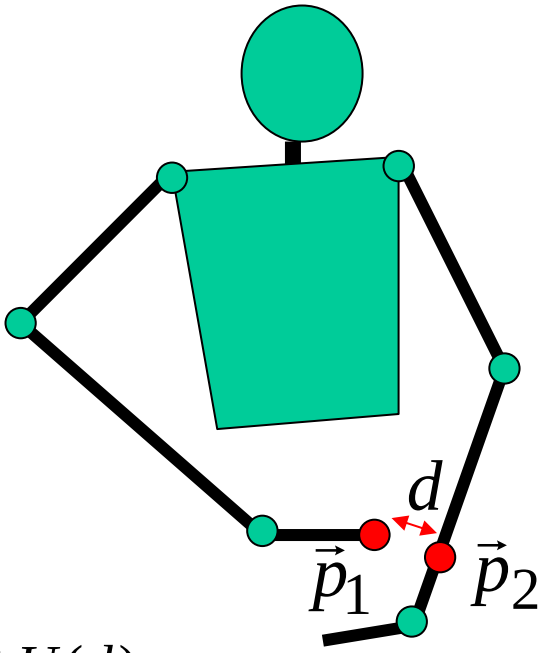
$$K = J_{pq}^T(q) K_p J_{pq}(q)$$

Tafel: Interpretation Kraftfeld

Die Koordinatentransformation kann bei kovarianten Tensoren auf Anwendung der Kettenregel reduziert werden („Kovariante Differentiation“)

# Kollisionsvermeidung

In diesem Fall ist das Potential ein abstoßendes, nicht ein anziehendes Potential



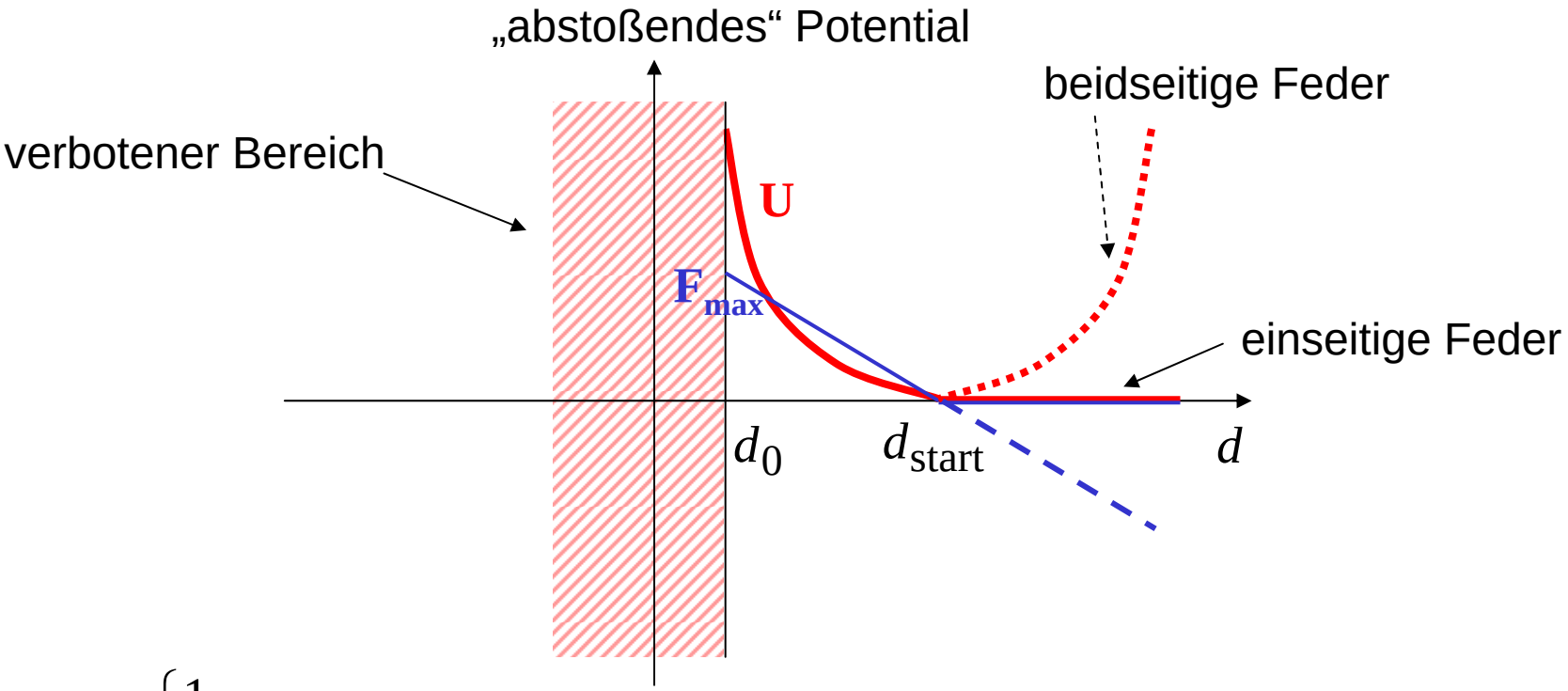
Potential: $U(d)$

Durch geometrische Kollisionsüberprüfung werden die Punkte $p_1$, $p_2$ mit dem kleinsten Abstand $d$ gefunden. $p_1$, $p_2$ sind wiederum Funktionen der Gelenkwinkel $q$

Gelenkmomente: $$\tau^T = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}d}\frac{\partial d}{\partial p_{i=1,2}}\frac{\partial p_{i=1,2}}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad \tau = -J_{pq}^T J_{dp}^T \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}d}^T$$

Bemerkung: Die Koordinatentransformation kann bei Kovektoren auf Anwendung der Kettenregel reduziert werden.

# Kollisionsvermeidung




$$U(d) = \begin{cases} \frac{1}{2} k_d (d - d_{\text{start}})^2 & d < d_{\text{start}} \\ 0 & d \geq d_{\text{start}} \end{cases}$$

Andere Potentialprofile sind auch möglich (z.B. exponentiell)

# Kollisionsvermeidung

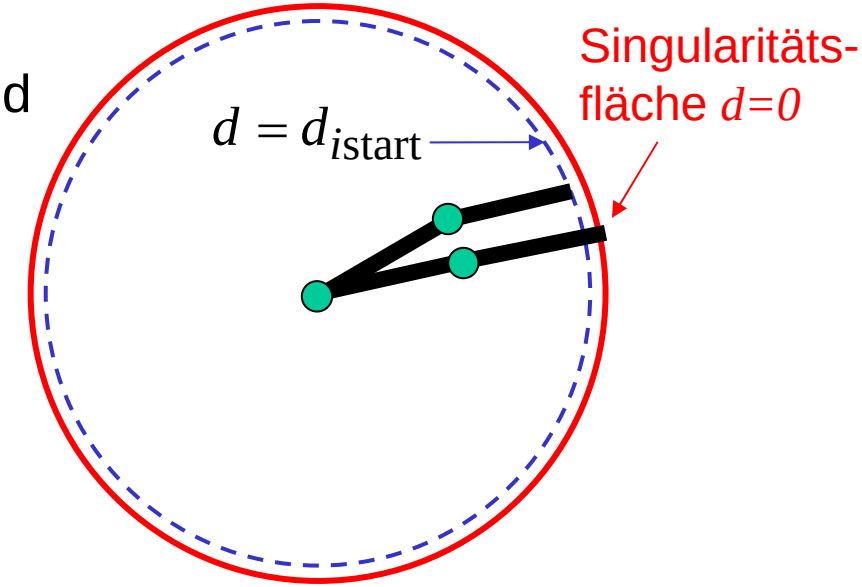
## The skeleton algorithm for real-time collision avoidance of a humanoid manipulator

Agostino DE SANTIS, Bruno SICILIANO
PRISMA Lab, Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Università di Napoli Federico II
www.prisma.unina.it

Alin ALBU-SCHÄFFER, Christian OTT, Gerd HIRZINGER
Institut für Robotik und Mechatronik, DLR
www.dlr.de/rm/en/

# Behandlung von Singularitäten „reloaded“

Man sucht eine Größe $d$, die als Abstand von der Singularität dienen kann (d.h. $d=0$ in der Singularität, sonst $d>0$)




z.B. für redundante Roboter:

$$d(q) = \det(J(q)J^T(q)) = 0$$

$$d(q) = d_1(q) \cdot d_2(q) \cdot \ldots \cdot d_i(q)$$

$i$ unterschiedliche Typen von Singularitäten

Man baut ein einseitiges Potential $U(d_i)$
auf und behandelt das Problem genauso wie bei der Kollisionsvermeidung,
d.h. man leitet $U(d_i)$ ab und generiert Gelenkdrehmomente

## Cartesian Impedance Control:

vertical

stiffness=500 N/m

damping factor 0.001

horizontal

stiffness=500 N/m

damping factor 0.7

# Aufsummieren von Potentialen

Die einzelnen Potentiale werden aufsummiert in der Lyapunov-Funktion, genauso wie die Gelenkmomente.

$$V_P = \sum_i U_i \qquad \tau_P = \sum_i \tau_i$$

Hauptproblem: Bei mehreren Potentialen ist die Gleichgewichtslage nicht immer eindeutig, d.h.

- mehrere Gleichgewichte möglich (lokale Minima)
- u.U gibt es keine Ruhelage, in der alle Fehler minimiert werden – eine Kontrolle der einzelnen Restfehler ist nur indirekt, über die Auslegung der Federsteifigkeiten möglich.

mögliche Lösung: Priorisierung der Aufgaben durch Nullraumprojektion

- Erste Aufgabe wird immer gelöst
- Zweite Aufgabe wird nur gelöst, wenn nicht im Konflikt mit der ersten
- ….

# Nullraumsteifigkeiten

Kommandiertes Gelenkmoment aus dem Task Space Control:

$$\boxed{\tau = J^T(q)F + (I - J^T(q)J^{\#T}(q))\tau_0}$$

kartesische Komponente
(primäre Aufgabe)

Nullraum – Komponente
(sekundäre Aufgabe)

Allgemein, gegeben $p_i$ : $m_i$ - dimensionale Koordinate für Aufgabe $i=1,2,3,\ldots$

Dazu $U_i(p_i)$, $\quad \tau_i = -J_i^T(q)\dfrac{\partial U_i^T(p_i)}{\partial p_i}$ $\qquad$ mit $J_i(q) = \dfrac{\partial p_i}{\partial q}$

Folgendes Gelenkmoment implementiert die Priorisierung:

$$\boxed{\tau = \tau_1 + (I - J_1^T J_1^{\#T})\left(\tau_2 + (I - J_2^T J_2^{\#T})\left(\tau_3 + (I - J_3^T J_3^{\#T})\cdots\right)\right)}$$

Bemerkung: Ein Nachteil ist, dass durch die Projektion die Passivität zwar erhalten bleibt, die Eindeutigkeit der Ruhelage aber nicht.